Компанийн ноогдол ашгаа өөрчлөх шийдвэр болон стохастик DDM

Г.Баттулга

МУИС-ХШУИС

2021/05/31

Монголбанкны нэрэмжит эрдэм шинжилгээний хурал

Агуулга

1. Судлагдсан байдал
2. Ноогдол ашгийн үсрэлттэй DDM
3. Опционы үнэлэлт
4. Амьдралын даатгалын бүтээгдэхүүнүүд
5. Локал эрсдэл минимумчлах стратеги
6. Хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт

Williams(1938)

$$P = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{(1+k)^m}$$

- P-хувьцааны ханш
- d_m-m дүгээр жил дэх ноогдол ашиг
- k-дисконт хүү (тухайн хувьцаанаас шаардаж буй өгөөж)

Gordon(1956)

$$P = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{(1+k)^m} = \frac{d_0(1+g)}{(k-g)}$$

- g-ноогдол ашгийн жилийн өсөлт
- $d_m = d_0(1+g)^m$
- d_0-хугацааны эхэндэх ноогдол ашиг

Судлагдсан байдал

Hurley(1994)

$$E[P] = \frac{d_0}{k} + \frac{1+k}{k^2}\triangle p$$

- $d_m = \begin{cases} d_{m-1} + \triangle, & p \\ d_{m-1}, & 1-p \end{cases}$
- p-ноогдол ашиг өсөх магадлал
- $\triangle$-ноогдол ашгийн өсөлт

Hurley(1994)

$$E[P] = \frac{d_0(1+pg)}{k-pg}$$

- $d_m = \begin{cases} d_{m-1}(1+g), & p \\ d_{m-1}, & 1-p \end{cases}$
- p-ноогдол ашиг өсөх магадлал
- g-ноогдол ашгийн өсөлтийн хувь

Судлагдсан байдал

Hurley(1998)

$$E[P] = \frac{d_0}{k} + \frac{1+k}{k^2} E[\tilde{\triangle}]$$

- $\tilde{\triangle}_i = \begin{cases} \text{өсөлтийн хэмжээнүүд} & \triangle_1, \ldots \triangle_n \\ \text{магадлалууд} & p_1, \ldots, p_n \end{cases}$
- $d_m = d_0 + \tilde{\triangle}_1 + \cdots + \tilde{\triangle}_m$

Hurley(1998)

$$E[P] = \frac{d_0(1 + E[\tilde{g}])}{k - E[\tilde{g}]}$$

- $\tilde{g}_i = \begin{cases} \text{өсөлтийн хувиуд} & g_1, \ldots g_n \\ \text{магадлалууд} & p_1, \ldots, p_n \end{cases}$
- $d_m = d_0(1 + \tilde{g}_1) \ldots (1 + \tilde{g}_m)$

Дефолт эрсдэлтэй хувьцааны ханш

$$P_t^\tau := \sum_{m=1}^{\tau-t-1} \frac{d_{t+m}}{(1+k)^m}$$

- d_{t+m} нь $(t+m)$ хугацаандах хувьцааны ноогдол ашиг
- k нь хувьцаанаас шаардаж буй өгөөж

Ноогдол ашгийн загварчилгаа

$$d_t = d_{t-1} + Y_t I_t.$$

- Y_t нь t хугацаандах ноогдол ашгийн өөрчлөлт
- I_t нь t хугацаандах компанийн ноогдол ашгаа өөрчлөх шийдвэр
- $$I_t = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \zeta_t \leq z_t^T \gamma \\ 0, & \text{if} \quad \zeta_t > z_t^T \gamma \end{cases},$$

Ноогдол ашгийн үсрэлттэй DDM

Хувьцааны ханш

$$P_t^\tau := G_t(\tau, t+1]\left(d_0 + \sum_{m=1}^{t} Y_m I_m\right) + \sum_{m=t+1}^{\tau-1} G_t(\tau, m] Y_m I_m,$$

$$P_t := P_t^\infty = G_t(\infty, t+1]\left(d_0 + \sum_{m=1}^{t} Y_m I_m\right) + \sum_{m=t+1}^{\infty} G_t(\infty, m] Y_m I_m.$$

- $G_t(s) := \frac{1}{k(1+k)^{s-t-1}}$, $s = t+1, t+2, \dots$
- $G(s,t] = G(t) - G(s)$.

Компанийн дефолт болох хугацаа

$$\{\tau = n\} = \{P_1 \geq \alpha, \dots, P_{n-1} \geq \alpha, P_n < \alpha\}$$

- α нь дефолт босго

Хамтын тархалт

$$F_t^n(x) := \mathbb{P}\big[P_t^\tau \leq x, \tau = n\big], \quad \text{for} \quad t < n.$$

$$F_t^n(x) = \mathbb{P}\big[P_t^n \leq x; -P_1 \leq -\alpha, \dots, -P_{n-1} \leq -\alpha, P_n < \alpha\big],$$

Хувьцааны ханшийн k-дугаар эрэмбийн момент

$$\mathbb{E}\big[(P_t^\tau)^k \big| \tau > t\big] \approx \frac{1}{\mathbb{P}[\tau > t]} \sum_{n=t+2}^{\infty} \sum_{\bar{i}_m = 0_m}^{1_m} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f\big(x, \mu_1(\bar{i}_{n-1}), \sigma_{t,t}^{n,n}(\bar{i}_{n-1})\big) \times \mathcal{N}\big(\alpha^n, \mu_{2.1}(x, \bar{i}_m), \Omega_{22.1}(\bar{i}_m)\big) p(\bar{i}_m) dx.$$

Опционы үнэлгээ

Опционыг үнэлэх систем

$$\begin{cases} P_t = (1+k)P_{t-1} - d_t + u_t \\ d_t = d_{t-1} + Y_t I_t \\ I_t = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \zeta_t \leq z_t^T \gamma \\ 0, & \text{if} \quad \zeta_t > z_t^T \gamma \end{cases} \end{cases}, \quad t = 1, \dots, T,$$

Санхүүгийн математикийн 1-дүгээр суурь теорем

Зах зээл арбитражгүй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь хямдруулсан хувьцааны ханш мартингал байх risk-neutral магадлалын хэмжээс оршин байх явдал юм.

Risk-neutral магадлалын хэмжээс

$$\tilde{\mathbb{E}}\big[P_t - (1+r)P_{t-1}|\mathcal{G}_{t-1}\big] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta_{t-1}^* := \tilde{\mathbb{E}}\big[Y_t I_t - u_t|\mathcal{G}_{t-1}\big]$$

- $\theta_{t-1}^* := (k-r)P_{t-1} - d_{t-1}$

Risk-neutral магадлалын хэмжээс

$$\theta_{t-1}^* = \tilde{\mathbb{E}}\big[Y_t I_t|\mathcal{G}_{t-1}\big] \quad \text{and} \quad 0 = \tilde{\mathbb{E}}[u_t|\mathcal{G}_{t-1}].$$

Risk-neutral магадлалын хэмжээс

$$\xi \mid \bar{I}_{T-1} \sim \mathcal{N}\Big(2\Psi^{-1}(\bar{I}_{T-1})\delta^*, \Psi^{-1}(\bar{I}_{T-1})(I_T \otimes \Sigma)(\Psi^{-1}(\bar{I}_{T-1}))^T\Big)$$

- $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_T)^T$
- $\xi_t = (Y_t, u_t)^T$

Real магадлалын хэмжээс

$$\xi \mid \bar{I}_{T-1} \sim \mathcal{N}\Big(i_T \otimes \mu, I_T \otimes \Sigma\Big)$$

- $\mu = (\mu_Y, 0)^T$

Risk-neutral магадлалын хэмжээс

$$\bar{\xi}_t^c \mid \mathcal{F}_t, \bar{I}_{T-1} \sim \mathcal{N}\Big(\mu_{2.1}(\bar{\xi}_t, \bar{I}_{T-1}), \Sigma_{2.1}(\bar{I}_t^c)\Big)$$

Колл опционы үнэлгээ

$$C_t^w = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \tilde{\mathbb{E}}\big[(\bar{P}_w - K)^+ | \mathcal{G}_t\big] = \frac{1}{2^{T-t}} \sum_{I_{t+1}=0}^{1} \cdots \sum_{I_T=0}^{1} C_t^w(I)$$

- $P := (P_1, \dots, P_T)^T$
- $w = (w_1, \dots, w_T)^T$
- $\bar{P}_w := w^T P$
-

$$C_t^w(I) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \tilde{\mathbb{E}}\big[(\bar{P}_w - K)^+ \big| \mathcal{F}_t, I\big]$$
$$\frac{\sigma_{\bar{P}_w}(\bar{I}_t^c)}{(1+r)^{T-t}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} X_w^2(\bar{\xi}_t, I, K) \right\} + X_w(\bar{\xi}_t, I, K) \Phi\big(X_w(\bar{\xi}_t, I, K)\big) \right]$$

- $X_w(\bar{\xi}_t, I, K) := \big(\mu_{\bar{P}_w}(\bar{\xi}_t, I) - K\big) / \sigma_{\bar{P}_w}(\bar{I}_t^c)$.

Пут опционы үнэлгээ

$$P_t^w = \frac{1}{(1+r)^{T-t}}\tilde{\mathbb{E}}\big[(K-\bar{P}_w)^+|\mathcal{G}_t\big] = \frac{1}{2^{T-t}}\sum_{I_{t+1}=0}^{1}\cdots\sum_{I_T=0}^{1}P_t^w(I)$$

- $$\begin{aligned} P_t^w(I) &= \frac{1}{(1+r)^{T-t}}\tilde{\mathbb{E}}\big[(K-\bar{P}_w)^+\big|\mathcal{F}_t, I\big] \\ &= \frac{\sigma_{\bar{P}_w}(\bar{I}_t^c)}{(1+r)^{T-t}}\bigg[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\bigg\{-\frac{1}{2}X_w^2(\bar{\xi}_t, I, K)\bigg\} - X_w(\bar{\xi}_t, I, K)\Phi\big(-X_w(\bar{\xi}_t, I, K)\big) \end{aligned}$$

T жилийн хугацаатай цэвэр хуримтлалын даатгал

$$H_T := \frac{1}{(1+r)^T} g(P_T) 1_{\{T_x > T\}}.$$

- T_x нь x настай хүний ирээдүйд амьдрах хугацааны санамсаргүй хэмжигдэхүүн
- T нь хугацаа
- P_T нь T хугацаандах хувьцааны ханш
- $g(x) = 1$, $g(x) = x$, $g(x) = \max\{x, K\} = [x - K]^+ + K$ and $g(x) = [K - x]^+$

T жилийн хугацаатай хугацаат даатгал

$$H_T := \frac{1}{(1+r)^{K_x+1}} g(P_{K_x+1}) 1_{\{K_x+1 \leq T\}} = \sum_{s=0}^{T-1} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} g(P_{t+s}) 1_{\{K_x = s\}},$$

- $K_x = [T_x]$ нь x настай хүний цомхотгосон ирээдүйд амьдрах хугацааны санамсаргүй хэмжигдэхүүн

segregated fund-д харгалзах хугацаат даатгал

$$S^{\,1}_{x+t:\overline{T-t}|} = \sum_{s=t}^{T-1} \left[\frac{F_{s+1}}{2^{s+1-t}} \sum_{I_{t+1}=0}^{1} \cdots \sum_{I_{s+1}=0}^{1} P_{t,s+1}(\bar{I}_{s+1}) \right] {}_{s-t}p_{x+t} q_{x+s};$$

segregated fund-д харгалзах цэвэр хуримтлалын даатгал

$${}_{T-t}S_{x+t} = \left[\frac{F_T}{2^{T-t}} \sum_{I_{t+1}=0}^{1} \cdots \sum_{I_T=0}^{1} P_{t,T}(I) \right] {}_{T-t}p_{x+t};$$

unit-linked даатгалд харгалзах хугацаат даатгал

$$U^{\,1}_{x+t:\overline{T-t}|} = \sum_{s=t}^{T-1} \left[\frac{F_{s+1}}{2^{s+1-t}} \sum_{I_{t+1}=0}^{1} \cdots \sum_{I_{s+1}=0}^{1} C_{t,s+1}(\bar{I}_{s+1}) + G_{s+1} \right] {}_{s-t}p_{x+t} q_{x+s};$$

unit-linked даатгалд харгалзах цэвэр хуримтлалын даатгал

$${}_{T-t}U_{x+t} = \left[\frac{F_T}{2^{T-t}} \sum_{I_{t+1}=0}^{1} \cdots \sum_{I_T=0}^{1} C_{t,T}(I) + G_T \right] {}_{T-t}p_{x+t}.$$

Локал эрсдэл минимумчлах стратеги

$$h_{t+1}=\frac{\Lambda(V_{t+1}|\mathcal{H}_t)}{\sigma_{t+1}^2}\quad\text{and}\quad h_{t+1}^0=\frac{1}{(1+r)^{t+1}}\Big(V_{t+1}-h_{t+1}P_{t+1}\Big),\quad t=0,\dots,T.$$

- $V_{t+1}:=\frac{1}{(1+r)^{T-t-1}}\tilde{\mathbb{E}}[H_T|\mathcal{H}_{t+1}]$
- $\sigma_{t+1}^2:=\frac{1}{2}\sum_{I_{t+1}=0}^{1}\Big(\sigma_{P_{t+1}}^2(I_{t+1})+\mu_{P_{t+1}}^2(\bar{\xi}_t,\bar{I}_{t+1})\Big)-(1+r)^2P_t^2.$
- $\Lambda(V_{t+1}|\mathcal{H}_t):=\widetilde{\text{Cov}}\big[V_{t+1},P_{t+1}-(1+r)P_t\big|\mathcal{H}_t\big]$

Колл опцион

$$\Lambda\big(C_{t+1}^w|\mathcal{H}_t\big)=\frac{1}{2^{T-t}(1+r)^{T-t-1}}\sum_{I_{t+1}=0}^{1}\cdots\sum_{i_T=0}^{1}\Psi^+\Big(\mu_w(\bar{\xi}_t,I),$$
$$\mu_{P_{t+1}}(\bar{\xi}_t,\bar{I}_{t+1}),\sigma_w(\bar{I}_t^c),\sigma_{w,P_{t+1}}(\bar{I}_t^c)\Big)-(1+r)^2C_t^wP_t;$$

Пут опцион

$$\Lambda\big(P^w_{t+1}|\mathcal{H}_t\big) = \frac{1}{2^{T-t}(1+r)^{T-t-1}} \sum_{I_{t+1}=0}^{1} \cdots \sum_{i_T=0}^{1} \Psi^-\Big(\mu_w(\bar{\xi}_t, I),$$
$$\mu_{P_{t+1}}(\bar{\xi}_t, \bar{I}_{t+1}), \sigma_w(\bar{I}^c_t), \sigma_{w,P_{t+1}}(\bar{I}^c_t)\Big) - (1+r)^2 P^w_t P_t;$$

Segregated санд харгалзах баталгаат хугацаат даатгал

$$\Lambda\big(S_{x+t+1:\overline{T-t-1}|}^{\;1}|\mathcal{H}_t\big) = \frac{1}{(1+r)^{T-t-1}} \sum_{s=t}^{T-1} \bigg[\frac{F_{s+1}}{2^{s+1-t}} \sum_{I_{t+1}=0}^{1} \cdots \sum_{I_{s+1}=0}^{1} \Psi^-\Big(\mu_{P_{s+1}}(\bar{\xi}_t, \bar{I}_{s+1}),$$
$$\mu_{P_{t+1}}(\bar{\xi}_t, \bar{I}_{t+1}), \sigma_{P_{s+1}}(\bar{I}^c_t), \sigma_{P_{s+1},P_{t+1}}(\bar{I}^c_t)\Big)\bigg]_{s-t}p_{x+t}\,q_{x+s} - (1+r)^2 S_{x+t:\overline{T-t}|}^{\;1} P_t;$$

Локал эрсдэл минимумчлах стратеги

Segregated санд харгалзах баталгаат цэвэр хуримтлалын даатгал

$$\Lambda\big({}_{T-t-1}S_{x+t+1}|\mathcal{H}_t\big) = \frac{1}{(1+r)^{T-t-1}}\bigg[\frac{F_T}{2^{T-t}}\sum_{I_{t+1}=0}^{1}\cdots\sum_{I_T=0}^{1}\Psi^-\Big(\mu_{P_T}(\bar{\xi}_t, I),$$

$$\mu_{P_{t+1}}(\bar{\xi}_t, \bar{I}_{t+1}), \sigma_{P_T}(\bar{I}_t^c), \sigma_{P_T,P_{t+1}}(\bar{I}_t^c)\Big)\bigg]{}_{T-t}p_{x+t} - (1+r)^2{}_{T-t}S_{x+t}P_t;$$

Unit-linked баталгаат хугацаат даатгал

$$\Lambda\big(U^{\;\;1}_{x+t+1:\overline{T-t-1}|}|\mathcal{H}_t\big) = \frac{1}{(1+r)^{T-t-1}}\sum_{s=t}^{T-1}\bigg[\frac{F_{s+1}}{2^{s+1-t}}\sum_{I_{t+1}=0}^{1}\cdots\sum_{I_{s+1}=0}^{1}\Psi^+\Big(\mu_{P_{s+1}}(\bar{\xi}_t, \bar{I}_{s+1}),$$

$$\mu_{P_{t+1}}(\bar{\xi}_t, \bar{I}_{t+1}), \sigma_{P_{s+1}}(\bar{I}_t^c), \sigma_{P_{s+1},P_{t+1}}(\bar{I}_t^c)\Big) + G_{s+1}\bigg]{}_{s-t}p_{x+t}q_{x+s} - (1+r)^2 U^{\;\;1}_{x+t:\overline{T-t}|}P_t;$$

Unit-linked баталгаат цэвэр хуримтлалын даатгал

$$\Lambda\big({}_{T-t-1}U_{x+t+1}|\mathcal{H}_t\big) = \frac{1}{(1+r)^{T-t-1}}\Bigg[\frac{F_T}{2^{T-t}}\sum_{I_{t+1}=0}^{1}\cdots\sum_{I_T=0}^{1}\Psi^+\Big(\mu_{P_T}(\bar{\xi}_t, I),$$

$$\mu_{P_{t+1}}(\bar{\xi}_t, \bar{I}_{t+1}), \sigma_{P_T}(\bar{I}_t^c), \sigma_{P_T,P_{t+1}}(\bar{I}_t^c)\Big) + G_T\Bigg]{}_{T-t}p_{x+t} - (1+r)^2{}_{T-t}U_{x+t}P_t;$$

Хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт

Параметрийн үнэлэлтийн систем

$$\begin{cases} P_t = (1+k)P_{t-1} - d_t + u_t \\ B_t^{-1} = x_t^T\alpha + w_t \\ d_t = d_{t-1} + (\mu_Y + v_t)I_t \\ I_t = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \zeta_t \le z_t^T\gamma \\ 0, & \text{if} \quad \zeta_t > z_t^T\gamma \end{cases} \end{cases}, \qquad t = 1, \dots, T,$$

- B_t^{-1} нь 1 жилийн хугацаатай эрсдэлгүй бондын ханшийн урвуу

Алдааны тархалт

$$\begin{bmatrix} u_t \\ w_t \\ v_t \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uw} & \sigma_{uY} \\ \sigma_{uw} & \sigma_w^2 & \sigma_{wY} \\ \sigma_{uY} & \sigma_{wY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

Үнэний хувь бүхий функц

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\theta) &= -\frac{3N_T}{2}\ln(2\pi) - \frac{N_T}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\sum_{t\in\mathcal{I}_1}(y_t - X_t\beta)^T\Sigma^{-1}(y_t - X_t\beta) \\
&- \frac{2(T-N_T)}{2}\ln(2\pi) - \frac{T-N_T}{2}\ln|\Sigma_{11}| - \frac{1}{2}\sum_{t\in\mathcal{I}_2}(y_t - X_t\beta)^T L^T\Sigma_{11}^{-1}L(y_t - X_t\beta) \\
&- \sum_{t\in\mathcal{I}_1}\ln\left[\Phi\left(z_t^T\gamma\right)\right] - \sum_{t\in\mathcal{I}_2}\ln\left[1-\Phi\left(z_t^T\gamma\right)\right],
\end{aligned}
$$

- $L := [I_2 : 0] \in \mathbb{R}^{2\times 3}$
- $\beta := (1+k, \alpha^T, \mu_Y)^T$
- $N_T := \sum_{t=1}^T I_t$
- $\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt$

Хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт

Параметрийн заагдалтгүй үнэлэлт

$$\hat{\beta}(\hat{\Sigma}) = (X^T \hat{\Omega}^{-1} X)^{-1} X^T \hat{\Omega}^{-1} y$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \left\{ \sum_{t \in \mathcal{I}_1} e_t e_t^T + (T - N_T) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{B}_{22}^{-1} \end{bmatrix} + \sum_{t \in \mathcal{I}_2} \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ \hat{\Sigma}_{21} \hat{\Sigma}_{11}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L e_t e_t^T L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & \hat{\Sigma}_{11}^{-1} \hat{\Sigma}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{I_t - \Phi\left[z_t^T \hat{\gamma}\right]}{\Phi\left[z_t^T \hat{\gamma}\right] \left(1 - \Phi\left[z_t^T \hat{\gamma}\right]\right)} \phi\left[z_t^T \hat{\gamma}\right] z_t = 0$$

- $X := \left[X_1^T : \cdots : X_T^T\right]^T$
- $y := (y_1^T, \dots, y_T^T)^T$
- $e_t = y_t - X_t \hat{\beta}(\hat{\Sigma})$ заагдалтгүй үлдэгдэл

Шугаман таамаглал

$$H_0 : R\beta = r$$

Параметрийн заагалалттай үнэлэлт

$$\hat{\beta}_*(\hat{\Sigma}_*) = \hat{\beta}(\hat{\Sigma}_*) - (X^T\hat{\Omega}_*^{-1}X)^{-1}R^T\left[R(X^T\hat{\Omega}_*^{-1}X)^{-1}R\right]^{-1}(R\hat{\beta}(\hat{\Sigma}_*) - r)$$

and

$$\hat{\Sigma}_* = \frac{1}{T}\left\{\sum_{t\in\mathcal{I}_1} e_{t*}e_{t*}^T + (T-N_T)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \hat{B}_{22*}^{-1}\end{bmatrix} + \sum_{t\in\mathcal{I}_2}\begin{bmatrix}I_2 & 0\\ \hat{\Sigma}_{21*}\hat{\Sigma}_{11*}^{-1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Le_{t*}e_{t*}^TL^T & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_2 & \hat{\Sigma}_{11*}^{-1}\hat{\Sigma} \\ 0 & 0\end{bmatrix}\right.$$

- $e_{t*} = y_t - X_t\hat{\beta}_*(\hat{\Sigma}_*)$ заагалалттай үлдэгдэл

Хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт

LR статистик

$$\mathrm{LR} = 2[\mathcal{L}(\hat{\theta}) - \mathcal{L}(\theta)] = N_T\big(\ln|\hat{\Sigma}_*| - \ln|\hat{\Sigma}|\big) + (T - N_T)\big(\ln|\hat{\Sigma}_{11*}| - \ln|\hat{\Sigma}_{11}|\big) \xrightarrow{d} \chi^2(q)$$

Асимптот Фишерийн мэдээллийн матриц

$$\Sigma_{\beta_{-1}}^{-1} := \operatorname*{plim}_{T\to\infty}\left\{-\frac{1}{T}\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta_{-1}\partial\beta_{-1}^T}\right]\right\} = \operatorname*{plim}_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}X_{-1}^T\Omega_{-1}^{-1}X_{-1}\right\}$$

$$\Sigma_{\omega}^{-1} := -\frac{1}{T}\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\omega\partial\omega^T}\right] = \frac{1}{2}D_3^T\big(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1}\big)D_3 = \left[2D_3^+\big(\Sigma\otimes\Sigma\big)D_3^{+T}\right]^{-1}$$

$$\Sigma_{\gamma}^{-1} := \operatorname*{plim}_{T\to\infty}\left\{-\frac{1}{T}\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\gamma\partial\gamma^T}\right]\right\} = \operatorname*{plim}_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\phi^2\left[z_t^T\gamma\right]}{\Phi\left[z_t^T\gamma\right]\left(1-\Phi\left[z_t^T\gamma\right]\right)}z_t z_t^T\right\}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta\partial\omega^T}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta\partial\gamma^T}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\omega\partial\gamma^T}\right] = 0$$

- $\beta_{-1} := (\alpha^T, \mu_Y)^T$, $\omega := \mathrm{vech}(\Sigma)$, $\theta_{-1} := \big(\beta_{-1}^T, \omega^T, \gamma^T\big)^T$

Хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт

Асимптот тархалт

$$\sqrt{T}\begin{bmatrix}\hat{\beta}_{-1}-\beta_{-1}\\ \hat{\omega}-\omega\\ \hat{\gamma}-\gamma\end{bmatrix}\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\Sigma_{\beta_{-1}} & 0 & 0\\ 0 & \Sigma_{\omega} & 0\\ 0 & 0 & \Sigma_{\gamma}\end{bmatrix}\right).$$

Анхаарал тавьсанд баярлалаа