МОНГОЛ БАНКНЫ
ЕРӨНХИЙЛӨГЧИЙН ТУШААЛ

2006 оны 11 сарын 17 өдөр Дугаар 537 Улаанбаатар хот

Зөвлөмж батлах тухай

"Төв банк /Монголбанк/-ны тухай хууль"-ийн 28 дугаар зүйлийн 1-ийн 2-т заасныг үндэслэн ТУШААХ НЬ:

1. "Үйл ажиллагааны эрсдэлийг тооцох зөвлөмж"-ийг хавсралтаар баталсугай.

2.Уг зөвлөмжийн талаар 2006 оны 12 дугаар сарын 25-ны өдрийн дотор арилжааны банкуудад сургалт зохион байгуулахыг Хяналт шалгалтын газар /Ж.Ганбаатар/, Банкны сургалтын төв /Д.Төрбат/-д даалгасугай.

3.Уг зөвлөмжийн дагуу эрсдэлийн удирдлагыг боловсронгуй болгох үйл ажиллагааг зохион байгуулж, үр дүнгийн талаар Монголбанкинд 2007 оны 1 дүгээр улиралд багтаан тайлагнахыг банкуудын Төлөөлөн удирдах зөвлөл болон Гүйцэтгэх захирал нарт даалгасугай.

3.Энэ тушаалын биелэлтэд хяналт тавьж ажиллахыг Хяналт шалгалтын газар /Ж.Ганбаатар/-т үүрэг болгосугай.

ЕРӨНХИЙЛӨГЧ А.БАТСҮХ

Thushaal2006.doc

14 1107

Монголбанкны Ерөнхийлөгчийн
2006 оны 11-р сарын 17-ны өдрийн
537 дугаар тушаалын хавсралт

ҮЙЛ АЖИЛЛАГААНЫ ЭРСДЭЛИЙГ ТООЦОХ ЗӨВЛӨМЖ

НЭГ. НИЙТЛЭГ ҮНДЭСЛЭЛ

Санхүүгийн байгууллагуудын үйл ажиллагааны эрсдэлийг тооцоход ашиглагддаг математик болон статистикийн загваруудын талаар банкны ажилтан болон хянан шалгагч нарт тодорхой мэдлэг олгоход энэхүү зөвлөмжийн гол зорилго оршино.

ХОЁР. ЭРСДЭЛ ТООЦОХ ЗАРЧИМ

Энэхүү зөвлөмжид тусгасан загварууд нь нөхцөлт (*Bayesian*) болон нөхцөлт бус (*Frequentists*) магадлалын тодорхойлолт/философи дээр суурилсан болно. Эдгээр зарчмын талаар сонголт хийхдээ банк, санхүүгийн байгууллага нь өөрийн үйл ажиллагааны онцлогийг харгалзан үзнэ.

ГУРАВ. НӨХЦӨЛТ БУС МАГАДЛАЛЫН ЗАГВАР

3.1.Эрсдэлийг тооцох зарчим

Үйл ажиллагааны эрсдэлийн тооцонд дискрет санамсаргүй хэмжигдэхүүнийг ашиглах нь түгээмэл байдаг. Иймд холбогдох эрсдэлийн тооцоонд хүлээж болзошгүй алдагдлын хэмжээ, мөн түүнчлэн ашиглагдаж буй тоо мэдээний давтамж зэргийг зайлшгүй анхаарах шаардлагатай.

Үйл ажиллагааны эрсдэлийн тооцоонд нөхцөлт бус магадлалыг ашиглахад баримтлах үндсэн зарчим бол алдагдлын талаарх тоо мэдээнд нийцсэн санамсаргүй хэмжигдэхүүний тархалтыг олох явдал юм. Эрсдэлийн тооцонд ашиглагддаг түгээмэл тархалтуудын талаарх мэдээллийг энэнхүү зөвлөмжийн Хавсралт 1-д хураангүй байдлаар харуулав. Алдагдлын тоо мэдээ нь санамсаргүй хэмжигдэхүүний тархалтад хэрхэн нийцэж байгаа талаар 3.2-д заасны дагуу дүгнэлт гаргана.

3.2.Эрсдэлийн тооцоонд ашиглах тархалтыг сонгох

Алдагдлын талаарх тоо мэдээ нь түгээмэл тархалтуудтай хэрхэн нийцэж байгааг дараахь статистикийн тестээр тодорхойлно. Үүнд:

<u>Колмогоров-Смирновын тест</u>: Энэхүү тестийн гол санаа нь эмпирик болон судлаачийн сонгосон тархалтуудыг хооронд нь харьцуулж, холбогдох функцуудын зөрүүг тооцоход оршино. Энэхүү тестийн гол үзүүлэлт нь KS (Dn) бөгөөд түүнийг дараахь байдлаар тооцно:

$$D_n = \max\left(\left|F_n(x) - F(x)\right|\right) \tag{1.1}$$

Үүнд: *Dn* нь тестийн үндсэн үзүүлэлт, *n* нь ажиглалтын тоо, *Fn(x)*=(n-k+0.5)/2, *k* нь тоон өгөгдлийн ранг, *F(x)* нь тархалтын функц болно.

Тухайн тестийн хувьд төрөл бүрийн ач холбогдлын түвшинд хамаарах хязгаарын утгуудыг харуулбал:

Хязгаарын утга	АХ-ын түвшин
1,07*[$n^{-1/2}$]	20%
1,22*[$n^{-1/2}$]	10%
1,36*[$n^{-1/2}$]	5%
1,63*[$n^{-1/2}$]	1%

Колмогоров-Смирновын тест нь холбогдох функцуудын зөрүүнээс хамгийн их утгатайг нь онцлон үздэг тул статистикийн хувьд сул байдаг. Колмогоров-Смирновын тестийн энэхүү сул тал нь цөөн тооны ажиглалт бүхий түүвэр дээр илэрхий харагддаг.

Андерсон-Дарлингийн тест: Энэ нь Колмогоров-Смирновын тестын боловсронгуй хувилбар нь юм. Энэхүү тестийн статистикийг дараахь байдлаар тооцно:

$$A_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|F_n(x) - F(x)\right|^2 \Psi(x) f(x)\,dx \tag{1.2}$$

Үүнд

$$\Psi = \frac{n}{F(x)\left(1 - F(x)\right)} \tag{1.3}$$

бөгөөд *n* нь ажиглалтын тоо, *F(x)* нь судлаачийн сонгосон тархалтын функц, *f(x)* судлаачийн сонгосон тархалтын нягтын функц, *Fn(x)* =(n-k+0.5)/2 болно. Тестийн статистикийн хувьд хязгаарын утгыг хүснэгтээр харуулбал:

Хэмжээс	АХ-ийн түвшин 5%	АХ-ийн түвшин 1%
1+0,2*[$n^{-1/2}$]	0.757	0.05
1+0,3*[$n^{-1/2}$]	1.321	0.01

Энэхүү тест нь босоо тэнхлэгийн дагуу тооцсон бүх зөрүүг харгалзан үздэг, Ψ функцийн тусламжтайгаар тархалтуудын вариацийг саармагжуулдаг, мөн түүнчлэн тархалтын нягтын тусламжтайгаар функцуудын хоорондын зөрүүг холбогдох магадлалын утгаар нь жигнэдэг тул Колмогоров-Смирновын тестээс илүү хүчтэй байдаг байна.

<u>Крамер Фон Мизесийн тест</u>: Энэ нь тархалтын функцуудын хоорондын зөрүүг тооцож, тэдгээрийн квадрат дундаж утгуудыг харьцуулах замаар дүгнэлт хийдэг статистикийн тест юм. Энэхүү тестийн үзүүлэлтийг дараахь байдлаар тооцно:

$$W^2 = \sum \left[F(x) - F_n(x) \right]^2 + \frac{1}{12n} \tag{1.4}$$

Крамер Фон Мизесын тест нь холбогдох статистикийг ажиглалтын тоогоор тохируулдагаараа онцлог юм. Уг тестийн хязгаарын утгуудыг хүснэгтээр харуулбал:

Хэмжээс	АХ-ийн түвшин 5%	АХ-ийн түвшин 1%
1+0,2*[$n^{-1/2}$]	0.124	0.174
1+0,16*[$n^{-1/2}$]	0.222	0.338

3.3.Экстремум хэлбэрийн тархалтаар эрсдэлийг тооцох

Үйл ажиллагааны эрсдэлтэй холбоотой тоо мэдээ ихэнх тохиолдолд хязгаарлагдмал байдаг, мөн түүнчлэн нэгэнт алдагдал хүлээсэн бол алдагдлын хэмжээ харьцангуй өндөр байдаг тул хэвийн болон түүнтэй адилтгах бусад тархалтыг ашиглах нь үр дүн муутай юм. Иймд судлаачид тархалтыг бүхлээр нь бус харин экстремум утгын тархалтыг эрсдэлийн тооцоонд ашиглахыг илүүтэйд үздэг байна. Экстремум тархалтуудын бүлэгт "*Frechet*", "*Gumbel*" болон "*Weibull*"-ын зэрэг тархалт тэргүүн ээлжинд хамаарна.

Экстремум хэлбэрийн тархалт болон түүнд хамаарах онол нь харьцангуй өргөн цар хүрээтэй асуудал тул үндсэн санааг хураангуй байдлаар толилуулах нь зүйтэй.

<u>Онолын хэсэг</u>: (*l*, *u*) гэсэн интервал дээр тодорхойлогдсон F_R тархалтын функцтэй $R_1, R_2 \ldots R_n$ санамсаргүй хэмжигдэхүүний хувьд *Zn* гэх эстремум утгуудыг нь дараахь байдлаар тодорхойлно:

$$Z_n = Min\left(R_1, R_2 \ldots R_n\right) \quad эсвэл \quad Z_n = Max\left(R_1, R_2 \ldots R_n\right) \tag{1.5}$$

Хэрэв F_R тархалтад хамаарах түүврийн утгууд нь хоорондоо хамааралгүй бол *Zn* санамсаргүй хэмжигдэхүүний тархалтыг дараахь байдлаар илэрхийлж болно: Үүнд:

$$F_{Zn}(z) = 1 - \left(1 - F_R(z)\right)^n \tag{1.6}$$

(1.6)-д заасан томъёог эрсдэлийн тооцоонд шууд ашиглах тохиолдолд зарим нэг хүндрэл гардаг тул цар хүрээг харуулсан α_n, мөн түүнчлэн байршлыг харуулсан β_n зэрэг параметруудаар санамсаргүй хэмжигдэхүүнийг тохируулдаг $\left(Zn - \beta_n\right)/\alpha_n$. Тохируулга хийсний үр дүнд тархалтын функц дараахь хэлбэртэй болно:

$$F_Z(z) = 1 - \exp\left(-\left(1 + \tau z\right)^{1/\tau}\right) \tag{1.7}$$

Үүнд "τ " параметрыг тархалтын "*сүүл*"-ийг илэрхийлсэн индекс гэж нэрлэдэг бөгөөд (τ >0) байх юм бол (1.7) нь "*Weibull*" хэлбэрийн, (τ =0) байх юм бол "*Gumbel*" хэлбэрийн, (τ <0) байх юм бол "*Frechet*" хэлбэрийн тархалттай байх болно.

Эрсдэл (VaR)-ын тооцоо: Энэхүү зөвлөмжийн онолын хэсэг болон экстремум утгын теоремыг ашиглан үйл ажиллагааны эрсдэлтэй холбоотойгоор хүлээж болзошгүй алдагдал (VaR)-ыг зохих магадлалын түвшинтэй нь дараахь байдлаар уялдуулна:

$$p^{ext} = 1 - F_{Zn}^{asymp}\left(-VaR\right) = \exp\left[-\left(1 + \tau\left(\frac{-VaR + \beta_n}{\alpha_n}\right)\right)^{1/\tau}\right] \tag{1.8}$$

(1.8)-ийг хувиргах замаар хүлээж болзошгүй алдагдлын хэмжээг дараахь байдлаар тооцно:

$$VaR = -\beta_n + \frac{\alpha_n}{\tau}\left[1 - \left(-\ln(p^{ext})\right)^{\tau}\right] \tag{1.9}$$

Параметрын тооцоо: (1.9)-ийн параметруудыг тооцох олон тооны арга байдаг бөгөөд томъёоллыг хялбар болгох үүднээс тархалтын (1, 2, 3 ….)-р эрэмбийн моментыг ашигладаг аргыг авч үзье. Хэрэв "*r*"-р эрэмбийн моментыг "m_r" гэж тэмдэглэвэл "*n*" ажиглалт бүхий *Xj* санамсаргүй хэмжигдэхүүний хувьд холбогдох моментыг нь дараахь байдлаар илэрхийлнэ:

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j U_j^r \tag{1.10}$$

Үүнд *Uj* нь *F(Xi)*-ын тархалтаас үл хамаарах тооцооллыг илэрхийлэх бөгөөд $p_j=(n-j+0.5)/n$ гэсэн томъёогоор тодорхойлно. Хоскинг (Hosking 1985)-ийн тооцоолсноор тархалтын моментуудыг холбогдох параметрын тусламжтайгаар дараахь байдлаар илэрхийлж болно:

$$m_r = \frac{1}{r+1}\left[\alpha_n + \frac{\beta_n}{\tau}\left\{1 - \frac{\Gamma(1+\tau)}{(1+r)^{\tau}}\right\}\right] \qquad \tau > -1, \tau \neq 0 \tag{1.11}$$

(1.11) дээр суурилан параметруудыг тооцохын тулд итерацийн аргуудыг ашиглах шаардлагатай байдаг бөгөөд энэ нь эргээд олон тооны хүндрэлтэй асуудлыг дагуулдаг. Иймд тооцооллыг хялбарчлах үүднээс Хоскинг дараахь томъёогоор параметрын тоочоог хийхийг зөвлөсөн байдаг. Үүнд:

$$\alpha_n = \frac{\left(2\widehat{m}_2 - \widehat{m}_1\right)\tau}{\Gamma\left(1+\tau\right)\left(1-2^{-\tau}\right)} \tag{1.12}$$

$$\beta_n = \widehat{m}_1 + \frac{\alpha_n}{\tau}\left(1-\Gamma\left(1-\tau\right)\right) \tag{1.13}$$

$$\tau = 7.859c + 2.9554c^2 \tag{1.14}$$

$$c = \frac{2\widehat{m}_2 - \widehat{m}_1}{3\widehat{m}_3 - \widehat{m}_1} - \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \tag{1.15}$$

Жишээ: "A" банкны салбар дээр гарсан хууль бус үйл ажиллагаа (ашиглан)-тай холбоотой хөрөнгө, мөнгөний дутагдлын талаар дараахь мэдээлэл өгөгдсөн байв.

Он	Дутагдал
1992	250,000.00
1993	201,600.00
1994	199,000.00
1995	182,000.00
1996	182,000.00
1997	175,000.00
1998	165,200.00
1999	160,300.00
2000	150,000.00
2001	110,000.00
2002	100,000.00
2003	95,000.00

Энэхүү мэдээллийг үндэслэн параметруудыг болон үйл ажиллагааны эрсдэлийн тооцоог хийхэд дараахь байдалтай байна. Үүнд:

$$c = 0.0481732 \qquad \tau = 0.3854517$$
$$\alpha_n = 44,698.36 \quad \beta_n = 111,209.94$$

Параметрын тооцоог үндэслэн үйл ажиллагааны эрсдлээс хүлээж болзошгүй алдагдлыг тодорхойлбол VAR=204,161.91-тэй тэнцүү гарч байна. Алдагдлын тооцоог хийхдээ p^{ext}=0.01 гэж үзсэн болно.

3.4.Эрсдэлийн загвар, тооцоог баталгаажуулах

Эрсдэлийн тооцоонд ашиглагдаж байгаа загвар нь бодит байдалтай хэр зэрэг нийцэж байгааг баталгаажуулах олон арга байдаг. Үүнээс хамгийн энгийн бөгөөд түгээмэл хэрэглэгддэг нь бодит алдагдал тооцоолсон алдагдлаас хэдэн удаа давсан болохыг хувийн жингээр тогтоодог арга юм. Өөрөөр хэлбэл бодит амьдрал дээр хүлээсэн алдагдал нь математик, статистикийн загвараар тооцоолсон алдагдлаас давах тохиолдол олон байх нөхцөлд загварыг боловсронгуй болгох, аль эсвэл өөрчлөх асуудлыг зайлшгүй тавих ёстой болдог.

Энгийн харьцаануудаас гадна статистикийн онол дээр суурилсан илүү боловсронгуй олон тооны аргууд байдаг болно. Жишээ болгох үүднээс энэхүү зөвлөмжинд Базелийн хорооны баримтад дурьдагдсан Купиекийн тестийн талаар танилцуулъя.

Уг тестийн хувьд “*T*” тооны ажиглалтын хувьд “*V*” удаа бодит алдагдал нь тооцоолсон алдагдлаас давна гэж үзвэл уг үзэгдлийн магадлал нь $(1-p)^{T-V}\,p^{V}$ -тэй тэнцүү байх болно. Статистикийн анхны таамаглалыг *Ho: p=p** (үүнд p* нь ач холбогдлын түвшин) гэж томъёолбол тестийг дараахь үзүүлэлтээр тооцно:

$$LR_{UC} = 2\ln\left[\left(1-p^{*}\right)^{T-V} p^{*V}\right] + 2\ln\left[\left(1-\frac{T}{V}\right)^{T-V}\left(\frac{V}{T}\right)^{V}\right] \qquad (1.16)$$

Үүнд LR_{UC} нь $\chi 2(1)$ тархалттай байх бөгөөд $LR_{UC}>3.84$ байвал анхны таамаглалыг няцааж болно. Өөрөөр хэлбэл $LR_{UC}<3.84$ байх юм бол загварыг боловсронгуй болгох, аль эсвэл өөрчлөх асуудал тавигдана.

ДӨРӨВ. НӨХЦӨЛТ МАГАДЛАЛЫН ЗАГВАР

4.1.Оршил

Үйл ажиллагааны эрсдэлийн тооцооны хувьд тоон өгөгдөл хязгаарлагдмал ба огт байхгүй байх тохиолдол олонтаа гардаг. Энэ нөхцөлд ажиглалтын тоог симуляцийн аргаар гаргаж авахаас өөр аргагүй болдог. Байесын статистик тооцооллын хувьд нөхцөлт магадлал дээр суурилсан симуляцийн аргуудыг өргөнөөр ашигладаг тул үйл ажиллагааны эрсдэлийн тооцоонд нэн тохиромжтой байдаг.

Гэхдээ нэг зүйлийг анхаарахад Байесын статистик тооцооллын хувьд субъектив хүчин зүйлсийг харгалзах тохиолдол олонтаа гардаг нь зарим нэг судлаачид болон эрдэмтдийн зүгээс эргэлзээ төрүүлэх үндэслэл болдог. Ийнхүү санал зөрөлдөх тохиолдол нь статистикийн нэр томъёог өөр өөр утгаар нь ашиглаж байгаагаас, мөн түүнчлэн шинжилгээ судалгааны үндсэн зорилгын талаар нэгдсэн ойлголттой болоогүй байгаа зэргээс ихээхэн шалтгаалдаг. Тухайлбал, “*параметрын* *тархалт*” гэж ярих нь зүйтэй юу, аль эсвэл “*магадлалын тархалт*” гэж ярих нь зүйтэй юу гэдэг дээр одоо болтол олон хүн эргэлздэг бололтой.

4.2.Онолын хэсэг

Статистик загвар нь $p \times 1$-ийн хэмжээстэй, санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүдийг агуулсан $\tilde{y}_t$ векторуудын төлөв байдлыг тодорхойлдог гэж үзье. Үүнд “*t*” гэсэн тодотгол нь тухайн нөхцөл байдлаас хамаарч цаг хугацаа, орон зай, ажиглалтын нэгж зэргийг илэрхийлж болно. $Y_t = \{y_s\}_{s=1}^{t}$ нь түүврийн эхний t ажиглалтыг харуулж байгаа гэж үзье. Мөн түүнчлэн $\tilde{y}_t$-ийн түүврийн олонлог нь ψ, харин **Y***t*-ийн түүврийн олонлог нь Ψ бөгөөд $\psi_0 = \Psi_0 = \{\varnothing\}$ гэж үзье. Энэ тохиолдолд “*A*” статистик загвар нь тархалтын нягтын функцуудын дарааллыг дараахь байдлаар илэрхийлэх болно:

$$p\left(y_t \middle| Y_{t-1}, \theta_A, A\right) \tag{1.17}$$

Үүнд θ_A нь үл мэдэгдэх хувьсагчдыг агуулсан $k_A \times 1$ хэмжээстэй вектор бөгөөд энэхүү векторын хувьд $\theta_A \in \Theta_A \subseteq \mathbb{R}^{k_A}$ нөхцөл хангдах ёстой. θ_A-д ямар тодорхойлолт өгөх нь ашиглаж буй загвараас шууд хамаарна. Жишээ нь, ихэнх эконометриксийн загварын хувьд θ_A нь үл мэдэгдэх параметрууд, аль эсвэл нуугдмал хувьсагч зэргийг төлөөлж байдаг.

p(.) нь *v*(.) хэмжээстэй тархалтын нягтын ерөнхий функц болно. Санамсаргүй хэмжигдэхүүн дискрет, тасралтгүй болон холимог эсэхийг нь *v*(.) хэмжээсийн тусламжтайгаар тодорхойлно.

Y$_t$ –ийн тархалтын нягтыг “*A*”загвар болон θ_A үл мэдэгдэгч векторын нөхцөлтэйгээр авч үзвэл:

$$p\left(Y_T \middle| \theta_A, A\right) = \prod_{t=1}^{T} p\left(y_t \middle| Y_{t-1}, \theta_A, A\right) \tag{1.18}$$

Хэрэв тухайн загварын хувьд $\tilde{y}_t$ векторууд нь хоорондоо ямар нэгэн хамааралгүй бол

$$p\left(y_t \middle| Y_{t-1}, \theta_A, A\right) = p\left(y_t \middle| \theta_A, A\right) \tag{1.19}$$

болох бөгөөд энэ нөхцөлд

$$p\left(Y_T \middle| \theta_A, A\right) = \prod_{t=1}^{T} p\left(y_t \middle| \theta_A, A\right) \tag{1.20}$$

(1.18) болон (1.20) нь загварын нэг хэсгийг илэрхийлэх бөгөөд нэгдсэн дүр зургийг харахын тулд анхдагч тархалтын нягт (*prior density*)-ын тухай ойлголтыг нэмж оруулах нь зүйтэй. Анхдагч тархалт буюу $p(\theta_A|A)$ нь θ_A векторд хамаарах, мөн түүнчлэн “*A*” загварт нийцэх тоон утгуудыг илэрхийлнэ. Өөрөөр хэлбэл $p(\theta_A|A)$ нь “**y”**–ийн утгуудыг мэдэгдэхээс өмнө θ_A–ийн талаар өгөгдсөн байсан мэдээллийг харуулах юм.

Анхдагч тархалтын нягт болон (1.18)-ийг нэгтгэн “y” болон θ_A–ийн нэгдсэн тархалтын нягтыг гарган авч болно:

$$p\left(y,\theta_A\middle|A\right)=p\left(\theta_A\middle|A\right)p\left(y\middle|\theta_A,A\right) \tag{1.21}$$

Үүний зэрэгцээ нэгдсэн тархалтын нягтыг дараах байдлаар илэрхийлж болно

$$p\left(y,\theta_A\middle|A\right)=p\left(y\middle|A\right)p\left(\theta_A\middle|y,A\right) \tag{1.22}$$

Иймд (1.21) болон (1.22)-ийг нэгтгэн дараах байдлаар бичиж болно:

$$p\left(\theta_A\middle|y,A\right)=\frac{p\left(\theta_A\middle|A\right)p\left(y\middle|\theta_A,A\right)}{p\left(y\middle|A\right)} \tag{1.23}$$

Амьдрал дээр ихэнх тохиолдолд $p(y|\mathrm{A})$-ийг тооцоолоход хүндрэлтэй байдаг бөгөөд $p(\theta_A|y,A)$-ийн ерөнхий хэлбэрийг мэдэж байхад л тодорхой дүгнэлт хийх боломж бүрддэг тул дараах хялбаршуулсан томъёог ашиглах нь илүү тохиромжтой:

$$p\left(\theta_A\middle|y,A\right)\propto p\left(\theta_A\middle|A\right)p\left(y\middle|\theta_A,A\right) \tag{1.24}$$

Үүнд $p(\theta_A\ |y,A)$-ийн дагалдан гарах тархалтын нягт (posterior density) юм. Дүгнэн хэлэхэд $p(\theta_A\ |y,A)$-г тооцох үндсэн зорилго нь тодорхой үл мэдэгдэх хувьсагчийн талаар өөрт өмнө байсан мэдээллийг тоон ажиглалттай нэгтгэх замаар хоёрдмол бус утга бүхий дүгнэлт гаргахад оршино.

4.3.Эрсдэлийн тооцоонд Байесын онолыг ашиглах нь

Эрсдэлийн тооцоонд ашиглагддаг ихэнх загварын хувьд судалгаа, шинжилгээний үндсэн үзүүлэлтийн дундаж утга, хэлбэлзэл зэрэг нь чухал ач холбогдолтой байдаг. Гэтэл бодит амьдрал дээр төрөл бүрийн шалтгаанаас хамаарч эдгээр параметруудыг үндэс суурьтайгаар тооцох боломж хязгаарлагдмал байдаг.

Жишээ нь ханшийн эрсдэлийг “VaR”-ын аргаар тооцох үед ханшийн хэлбэлзэл (үл мэдэгдэх параметр)-ийг нарийн мэдсэн байх шаардлагатай. Гэтэл улс төрийн тогтворгүй байдал, эдийн засгийн өсөлт хөгжил, ханшны тогтолцоо, төлбөрийн тэнцэл, гадаад валютын нөөц зэрэг олон тооны хүчин зүйлсээс шалтгаалан ханшийн хэлбэлзлийн талаар үүссэн хүлээлт/тооцоо нь хоорондоо ялгаатай байж болно. Өөрөөр хэлбэл алдагдлын эцсийн дүн хэд гарах вэ гэдэг нь ханшийн хэлбэлзлийн талаар сонгон авсан утгаас шууд хамаарч байгаа юм.

Энэхүү тодорхой бус байдал нь банк, санхүүгийн байгууллагын удирдлагад эрсдэлийн талаар зохих шийдвэрийг гаргахад хүндрэл учруулдаг. Жишээ нь: жилийн эцэст банк нь үйл ажиллагааны эрсдэлийг хаахад өөрийн хөрөнгө байршуулах шаардлагатай байгаа бол параметрын тодорхой бус байдлаас шалтгаалж алдагдлын дүнг “яг таг” мэдэх бололцоогүй байж болно.

Байесын онол дээр суурилсан статистикийн аргууд эдгээр хүндрэлийг даван туулах арга замыг олгодог байдлаараа онцлог юм. Энэ нь дараахь томъёоноос шууд илэрхий байх болов уу:

$$p\left(\omega \middle| y, A\right) = \int_{\Theta_A} p\left(\omega \middle| \theta_A, y, A\right) p\left(\theta_A \middle| y, A\right) dv(\theta_A) \tag{1.25}$$

Үүнд: бидний авсан жишээн дээр, ω нь ханшийн өөрчлөлтөөс хүлээж болзошгүй алдагдлыг, харин θ_A нь ханшийн хэлбэлзлийг тус тус илэрхийлж байгаа болно.

4.4.Анхдагч тархалтын нягтыг сонгох талаар

Байесын статистик тооцооллын аргуудын хувьд эцсийн үр дүн нь анхдагч тархалтын талаар хийсэн сонголтоос ихээхэн хамаарна. Иймд анхдагч тархалтын хэлбэрүүдийн талаар товч дурдах нь зүйтэй.

Эрсдэлийн судалгаанд хамгийн түгээмэл ашиглагддаг анхдагч тархалтуудыг нэг бол “*elicited prior*” юм. Энэ нь ихэнх тохиолдолд тухайн салбарт олон жил ажилласан, мэргэжлийн хүнээс авсан мэдээлэл, таамаглалыг илэрхийлж байдаг.

Үл мэдэгдэгч параметрын хүлээж болзошгүй утгуудыг илэрхийлэхэд “*uninformed prior*” чухал үүрэг гүйцэтгэдэг. Үүний тодорхой нэг жишээ бол (0,1) интервалд ижил магадлалтайгаар утга авах санамсаргүй хэмжигдэхүүний тархалт юм. “*Uninformed prior*”-той холбоотойгоор “*Jeffreys prior*”-г дурьдах нь зүйтэй болов уу, учир нь “*Jeffreys prior*” нь тодорхой хувиргалтын дараа өөрийн үндсэн шинж чанараа хадгалан үлдэх онцлогтой.

(1.18) болон (1.20)-д заасан функцтэй ижил хэлбэрийн функц бүхий анхдагч тархалт (тархалтын нягт)-ыг “*conjugate prior*” гэж нэрлэдэг.

Зарим нэг параметрын тодорхойлолтыг орхигдуулсан анхдагч тархалтыг “*hyperprior*” гэж нэрлэдэг. “*Hyperprior*”-уудыг хооронд нь давхардуулан ашиглаж болох бөгөөд энэ тохиолдолд загвартай холбоотой тодорхой бус байдал нэмэгдэхийг анхаарах нь зүйтэй.

4.5.Байесын түүврийн аргууд буюу параметрын тооцоо

Сүүлийн жилүүдэд компьютер, мэдээллийн техник, технологи эрчимтэй хөгжсөний үр дүнд Байесын онол дээр суурилсан олон тооны аргыг бодитойгоор тооцох боломжтой болсон. Жишээ болгох үүднээс энэхүү зөвлөмжинд Markov Chain Monte Carlo буюу MCMC-ийн аргуудын талаар товч дурьдах болно.

Байесын онол дээр суурилсан загваруудын хувьд дараахь илэрхийллийг үнэлэхийг эрмэлздэг:

$$E\left[f(x)\right] = \frac{\int f(x)\pi(x)dx}{\int \pi(x)dx} \qquad (1.26)$$

Үүнд π(x) нь дагалдан гарах тархалт (*posterior distribution*) юм. Монтэ Карлогийн аргачлалын хувьд π(x)-ээс тодорхой тоон утгуудыг түүвэрлэн авах замаар E[f(x)]-ийг ойролцоогоор бодохыг эрмэлздэг.

$$E\left[f(x)\right] \approx \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{T} f(X_t) \qquad (1.27)$$

гэтэл бодит амьдрал дээр π(x) нь стандарт бус хэлбэрийн байх тохиолдол олонтаа гардаг тул тоон утгуудыг түүвэрлэн авах бололцоо хязгаарлагдмал байдаг. Энэхүү хүндрэлийг давах түгээмэл аргуудын нэг бол Марковын цуваag ашиглах явдал юм.

<u>Гиббсын түүврийн арга (*Gibbs Sampler*)</u>: Энэхүү аргын хувьд θ_A параметрыг дараахь байдлаар дэд бүлэг/олонлогт хуваана:

$$\theta = \left(\theta'_{(1)}, \theta'_{(2)}, \ldots, \theta'_{(B)}\right) \qquad (1.28)$$

Үүнд дурын θ_b векторын хувьд

$$\theta'_{<(b)} = \left(\theta'_{(1)}, \ldots, \theta'_{(b-1)}\right) \quad ба \quad \theta'_{<(1)} = \{\varnothing\} \qquad (1.29)$$

Үүнтэй нэгэн адил зарчмаар

$$\theta'_{(b)>} = \left(\theta'_{(b+1)}, \ldots, \theta'_{(B)}\right) \quad ба \quad \theta'_{(B)>} = \{\varnothing\} \qquad (1.30)$$

(1.29) ба (1.30) зэргийг үндэслэн дараахь томъёоллыг оруулья:

$$\theta'_{-(b)} = \left(\theta'_{<(b)}, \theta'_{(b)>}\right) \qquad (1.31)$$

Гиббсын аргын хувьд (1.28)-д заасан дэд олонлогийн тоог сонгохдоо $p\left(\theta_{(b)}\middle|\theta_{-(b)}, I\right)$ гэсэн нөхцөлт магадлалын томъёогоор илэрхийлэгдсэн тархалтын нягтаас түүвэр авах бололцоог бүрдүүлсэн байх нь чухал юм. Энэхүү нөхцөл хангагдсан үед түүврийн эхний утга $\theta^{(0)}$–ийг тархалтын нягт p(θ | I)-аас дараахь байдлаар сонгоно:

$$\theta^{(0)'} = \left(\theta_{(1)}^{(0)'}, ..., \theta_{(B)}^{(0)'}\right) \tag{1.32}$$

Дараагийн алхам нь

$$\theta_{(b)}^{(1)} = p\left(\theta_{(b)}\middle|\theta_{<(b)}^{(1)}, \theta_{(b)>}^{(0)}, I\right) \quad (b = 1, ..., B) \tag{1.33}$$

үүнд $\theta^{(1)} = \left(\theta_{(1)}^{(1)'}, ..., \theta_{(B)}^{(1)'}\right)$ байх болно. Гэх мэтчилэн дээрх тооцоог “m” алхамтайгаар хийнэ гэж үзвэл

$$\theta_{(b)}^{(m)} = p\left(\theta_{(b)}\middle|\theta_{<(b)}^{(m)}, \theta_{(b)>}^{(m-1)}, I\right) \quad (b = 1, ..., B) \qquad m = 1, 2, 3... \tag{1.34}$$

Эдгээр алхамууд нь $\{\theta^{(m)}\}$ гэсэн Марковын цувааг үүсгэж байгаа бөгөөд шилжих хөдөлгөөний магадлал (тухайн тохиолдолд тархалтын нягт) нь дараахь байдлаар илэрхийлэгдэнэ:

$$p\left(\theta^{(m)}\middle|\theta^{(m-1)}, G\right) = \prod_{b=1}^{B} p\left(\theta_{(b)}^{(m)}\middle|\theta_{<(b)}^{(m)}, \theta_{(b)>}^{(m-1)}, I\right) \tag{1.35}$$

<u>Метрополис-Хастингсын Алгоритм</u> (Metropolis-Hastings Algorithm): Энэхүү алгоритмын тусламжтайгаар загварын параметруудыг тодорхойлохын тулд шилжих хөдөлгөөний магадлалыг илэрхийлсэн тархалтын нягтын дурын функц $q(\theta^* \mid \theta, H)$, тархалтын нягтыг илэрхийлсэн θ^* аргумент болон тооцоог эхлүүлэхэд шаардлагатай анхны тоон утга $\theta^{(0)} \in \Theta$ зэрэг нь өгөгдсөн байх ёстой. Алгоритмын алхам бүрт $q\left(\theta^*\middle|\theta^{(m-1)}, H\right)$-ээс авсан түүврийн утга θ^* нь $\theta^{(m)}$-д тохирч байгаа эсэх талаар дүгнэлт хийх шаардлагатай байдаг. Үүнийг дараахь магадлалтайгаар тооцно:

$$\alpha\left(\theta^*\middle|\theta^{(m-1)}, H\right) = \min\left\{\frac{p\left(\theta^*\middle|I\right)/q\left(\theta^*\middle|\theta^{(m-1)}, H\right)}{p\left(\theta^{(m-1)}\middle|I\right)/q\left(\theta^{(m-1)}\middle|\theta^*, H\right)}, 1\right\} \tag{1.36}$$

Хэрэв түүврийн утга θ^* нь $\theta^{(m)}$-д тохирохгүй байгаа бол $\theta^{(m)} = \theta^{(m-1)}$ гэж үзнэ.

Алгоритмыг тодорхой болгох үүднээс “*хүлээн зөвшөөрөгдсөн*” түүврийн утгуудын тархалтын нягтын кернел (өгөгдсөн тархалтын нягттай пропорциональ бөгөөд сөрөг бус дурын функц)-ийг дараахь байдлаар илэрхийлье:

$$u\left(\theta^{*}\middle|\theta,H\right)=q\left(\theta^{*}\middle|\theta,H\right)\alpha\left(\theta^{*}\middle|\theta,H\right) \tag{1.37}$$

Үүнээс зэрэгцээ, түүврийн утгыг хүлээн зөвшөөрөхгүй байх магадлалыг тодорхойлбол:

$$r\left(\theta\middle|H\right)=1-\int_{\Theta}u\left(\theta^{*}\middle|\theta,H\right)dv\left(\theta^{*}\right) \tag{1.38}$$

Өөрөөр хэлбэл (1.38) нь θ өгөгдсөн байхад θ*-ийг хүлээн зөвшөөрөхгүй байх магадлалыг илэрхийлэх бөгөөд энэхүү магадлал нь θ*-г түүвэрлэн авахаас өмнө тооцогдож болохыг харуулж байна.

Иймд энэхүү алгоритмтай холбоотой Марковын цувааг “v” хэмжээс бүхий $A\subseteq\Theta$ олонлогууд дээр тодорхойлогдсон шилжих хөдөлгөөний магадлалаас дараахь байдлаар гарган авна:

$$P\left(A\middle|\theta,H\right)=\int_{A}u\left(\theta^{*}\middle|\theta,H\right)dv\left(\theta^{*}\right)+r\left(\theta\middle|H\right)I_{A}\left(\theta\right) \tag{1.39}$$

Үүнтэй холбоотой шилжих хөдөлгөөний тархалтын нягтыг тодорхойлохын тулд Диракийн дельта функц $\delta_{\theta}(\theta^{*})$-ийг дараахь байдлаар ашиглана:

$$\int_{A}\delta_{\theta}\left(\theta^{*}\right)f\left(\theta^{*}\right)dv\left(\theta^{*}\right)=f\left(\theta\right)I_{A}\left(\theta\right) \tag{1.40}$$

Эдгээрийг үндэслэн $\theta^{(m-1)}$-ээр индексжүүлсэн Марковын цувааг тодорхойлно:

$$p\left(\theta^{(m)}\middle|\theta^{(m-1)},H\right)=u\left(\theta^{(m)}\middle|\theta^{(m-1)},H\right)+r\left(\theta^{(m-1)}\middle|H\right)\delta_{\theta^{(m-1)}}\left(\theta^{(m)}\right) \tag{1.41}$$

REFERENCE

Arnold Zellner "*Bayesian Econometrics*" Econometrica March 1985

Arnold Zellner "*Some Aspects of the History of Bayesian Information Processing*" Conference Paper Washington D.C 2003

Basel Committee on Banking Supervision "*Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*" A Revised Framework - Comprehensive Version, June 2004

Basel Committee on Banking Supervision "*Operational risk transfer across financial sectors*" Joint Forum Report, November 2001

Basel Committee on Banking Supervision "*Regulatory Treatment of Operational Risk*" Working Paper, September 2001

Basel Committee on Banking Supervision "*Sound Practices for the Management and Supervision of Operational Risk*" Consultative Document, February 2003

Edward I. Altman, Anthony Saunders "*An Analysis and Critique of the BIS Proposal on Capital Adequacy and Ratings*" NYU Salomon Center's Stern School of Business Forum, February 2000

Edward T.Jaynes "*Bayesian Methods, General Background*" Fourth Annual Workshop on Bayesian/Maximum Entropy Methods August 1984

Francois M.Longin "*From value-at-risk to stress testing: The extreme value approach*" Journal of Banking and Finance 24 (2000) 1097-1130

Hennie Van Greuning, Sonja Brajovic Bratanovic "*Analyzing and Managing Banking Risk: Framework for Assessing Corporate Governance and Financial Risk*" World Bank Publications; 2nd edition, May 2003

John Geweke "*Contemporary Bayesian Econometrics and Statistics*" Wiley Series in Probability and Statistics 2005

Kai Li, David Weinbaum "*The Empirical Performance of Alternative Extreme Value Volatility Estimators*" December 20, 2000

Karsten T.Hansen "*Introduction to Bayesian Econometrics and Decision*" January 2002

Marcelo G. Cruz “*Modelling, measuring and hedging operational risk*” Wiley Finance Series 2002

Paul Embrechts “*Extreme Value Theory as a Risk Management Tool*” April 1999

Paul Embrechts “*Extreme Value Theory: Potential and Limitations as an Integrated Risk Management Tool*” January 2000

Sune Karlsson “*Bayesian Methods in Econometrics: Numerical Methods*” November 2004

Siddhartha Chib "*Markov Chain Monte Carlo Methods: Computation and Inference*" Handbook of Econometrics: volume 5 (eds J.J. Heckman and E. Leamer)
North Holland, Amsterdam, (2001), 3569-3649.

СТАТИСТИКИЙН ТҮГЭЭМЭЛ ТАРХАЛТУУД

	ТАРХАЛТЫН НЭР	ТАРХАЛТ (НЯГТ)-ЫН ФУНКЦ	ПАРАМЕТРЫН ТООЦОО
1	Хэвийн тархалт (*Normal Distribution*)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$\mu=\frac{\sum_{j=1}^{N}X_j}{N}\quad \sigma=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}\left(X_j-\mu\right)^2}{N}}$
2	Лог-нормаль тархалт (*Lognormal Distribution*)	$f(x)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)=\frac{\Phi(z)}{\sigma x}\quad z=\frac{\log x-\mu}{\sigma}$	$\mu=\overline{Z}\quad \sigma=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}\left(Z_j-\overline{Z}\right)^2}{N}}$
3	Экспоненциаль тархалт (*Exponential Distribution*)	$f(x)=\lambda^{-1}\exp\left[-\frac{(x-\theta)}{\lambda}\right]\quad x>\theta\quad \lambda>0$	$\lambda=\frac{1}{\sum_{j=1}^{N}X_j/N}$
4	Вэйбуллын тархалт (*Weibull Distribution*)	$f(x)=\frac{\alpha}{\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(x/\beta)^\alpha}$	$\beta=\frac{c\ln(a)-\log(b)}{c-1}\quad \alpha=-\frac{\ln(\ln(4))}{\ln(b)-\ln(\beta)}$ $c=-0.262167,$ "a" болон "b" нь 25 ба 75 дахь квантиль
5	Парето тархалт (*Pareto Distribution*)	$f(x)=\frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}$	$\alpha=\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\right)\Big/\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j-\theta\right)$
6	Гамма тархалт (*Gamma Distribution*)	$f(x)=\frac{(x/\theta)^\alpha e^{-x/\theta}}{x\Gamma(\alpha)}$	$\theta=\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)-\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^2\right]\Big/\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\right)$
7	Бета тархалт (*Beta Distribution*)	$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}u^\alpha(1-u)^{\beta-1}\frac{1}{x}\quad 0<x<\theta,u=\frac{x}{\theta}$	$\alpha=\frac{\theta\delta^2-\delta\omega}{\theta\omega-\delta^2}\quad \beta=\frac{\theta\delta-\omega(\theta-\delta)}{\theta\omega-\theta\delta^2}$ $\delta=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\quad \omega=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^2$